Домашно №1 по Дизайн и анализ на алгоритми на специалност Компютърни науки, 2 поток, летен семестър 2022/2023г.

Камен Димитров Младенов, Група 6

26 Март 2023

Задача 1. Доказателство

I. Ще докажем, че $n^{1+\lg n} \preceq T(n)$ с индукция по n. По дефиниция, това е същото като да докажем, че съществува положителна константа c_1 и положително n_0, такова че за всяко $n \geq n_0$, $T(n) \geq c_1 n^{1+\lg n}$.

Индуктивното предположение е, че

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \geq c_1 \left(\frac{n}{2}\right)^{1+\lg \frac{n}{2}}$$

Тогава

$$\begin{aligned} T(n) = n^2 T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 &\geq n^2 . c_1 \left(\frac{n}{2}\right)^{1+\lg \frac{n}{2}} + 1 \\ &= n^2 c_1 \frac{n^{\lg n}}{2^{\lg n}} + 1 && // \ \lg \frac{n}{2} = \lg n - \lg 2 \\ &= c_1 n^{1+\lg n} \frac{n}{2^{\lg n}} + 1 && // \ 2^{\lg n} = n \\ &= c_1 n^{1+\lg n} + 1 \\ &\geq c_1 n^{1+\lg n} \text{ за всеки избор на } c_1 > 0 \text{ и } n_0 > 0 \end{aligned}$$

II. Ще засилим твърдението и ще докажем, че $T(n) \preceq n^{1+\lg n} - 1$ с индукция по n, тоест че $\exists c_2 > 0 \ \exists n_0 > 0 \ \forall n \geq n_0 : T(n) \leq c_2 n^{1+\lg n} - 1$

Индуктивното предположение е, че

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c_2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1+\lg \frac{n}{2}} - 1$$

И тогава

$$\begin{aligned} T(n) = n^2 T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 &\leq n^2 \left(c_2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1+\lg \frac{n}{2}} - 1 \right) + 1 \\ &= c_2 n^{\lg n + 1} - n^2 + 1 \\ &= c_2 n^{\lg n + 1} - 1 - n^2 + 2 \\ &\leq c_2 n^{\lg n + 1} - 1 \text{ за всеки избор на } c_2 > 0 \text{ и } n_0 \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Задача 2. Доказателство

Функцията връща a^3, ако $a > 0$ и 0 иначе, където a е целочислено.

Инвариант на цикъла: За всяко достигане на ред 4, стойностите на променливите x, y, z са:

$$\begin{aligned} x &= 6(i+1) \\ y &= 1 + \sum_{j=0}^{i} 6j = 1 + 3i(i+1) \\ z &= \sum_{j=0}^{i-1} 1 + 3j(j+1) = i + 3\sum_{j=0}^{i-1} j(j+1) = i + 3\left(\sum_{j=0}^{i-1} j^2 + \sum_{j=0}^{i-1} j\right) \\ &= i + 3\left(\frac{(i-1)i(2(i-1)+1)}{6} + \frac{(i-1)i}{2}\right) = i + 3\left(\frac{2i^3 - 2i^2}{6}\right) = i^3 \end{aligned}$$

База: При първото достигане на ред 4, $i = 0$ и променливите x, y, z имат стойностите, зададени на ред 2. В същото време, при инварианта $6(0 + 1) = 6, 1 + 3.0.(0 + 1) = 1, 0^0 = 0$.

Поддръжка: Допускаме, че твърдението е изпълнено за k-тото нефинално изпълнение на ред 4 (където $i = k - 1$). Разглеждаме следващото достигане на ред 4. i приема стойността k. В цикъла, след завършването на текущата итерация:

$$\begin{aligned}
&\text{От ред 5} \quad z = (k-1)^3 + (1 + 3(k-1)k) = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + 1 + 3k^2 - 3k = k^3 \\
&\text{От ред 6} \quad y = (1 + 3(k-1)k) + (6k) = 1 + 3k^2 - 3k + 6k = 1 + 3(k+1)k \\
&\text{От ред 7} \quad x = (6k) + 6 = 6(k+1)
\end{aligned}$$

В същото време, спрямо новото i и според твърдението, $x = 6(k + 1), y = 1 + 3k(k + 1), z = k^3$.

Терминация: От условието на ред 4, цикъла ще завърши при $(a + 1)$-ото изпълнение, когато $i = a$. То тогава, от инварианта, върнатата стойност на ред 10 ще бъде точно $z = a^3$.

Задача 3. Доказателство